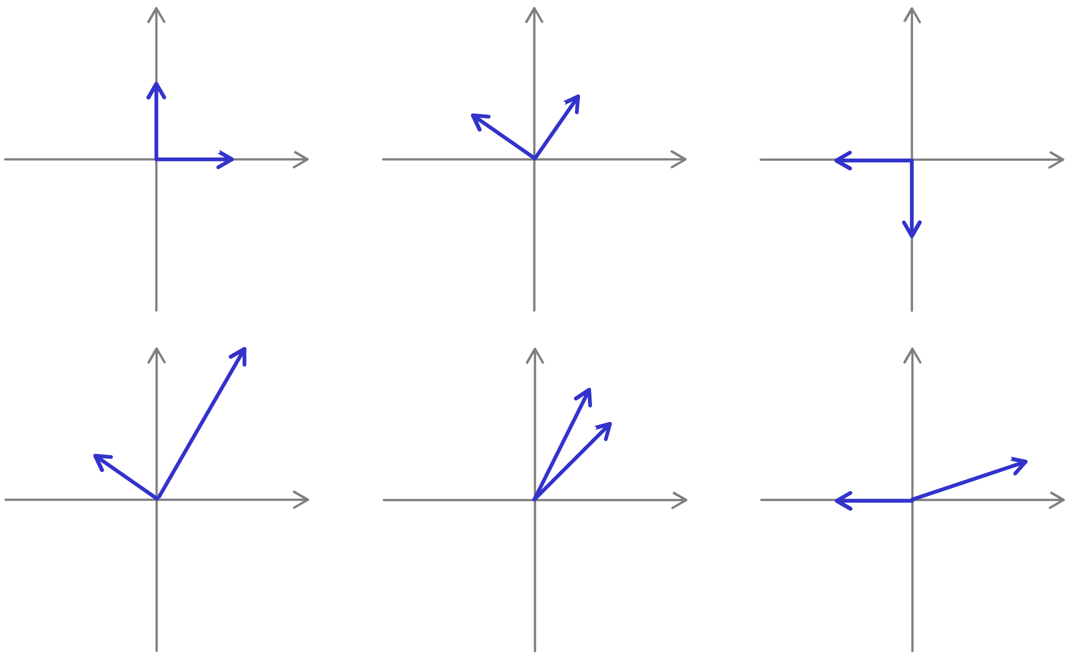
Alle Basen sind gleich.

Aber manche Basen sind ~~gleicher~~ ortho-normal



Notiz: Für jede hermitesche Sesquilinearform β ist
$$\beta(\underline{v},\underline{v}) \in \mathbb{R}$$
$\forall \underline{v} \in V$.

$$\Big(\beta(\underline{v},\underline{v}) = \overline{\beta(\underline{v},\underline{v})}$$
$$\left.a+ib = \underbrace{\overline{a+ib}}_{a-ib}\right\} \Rightarrow b=0 \Big)$$

Def: [6.5.2] Eine $\left|\begin{array}{l}\text{symmetrische}\\ \text{hermitesche}\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l}\text{Bilinearform } \beta \text{ auf einem}\\ \text{Sesquilinearf.}\end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\text{-VR } V\\ \mathbb{C}\text{-}\end{array}\right.$ ist <u>positiv definit</u>, falls
$$\underbrace{\beta(\underline{v},\underline{v})}_{\in \mathbb{R}} > 0 \quad \forall \underline{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$$

Def: [6.5.2] Ein <u>Skalarprodukt</u> auf einem $\mathbb{R}$-VR V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \underline{v}, \underline{w} &\longmapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \end{aligned}$$

Ein <u>euklidischer VR</u> $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{R}$-VR zusammen mit einem solchen Skalarprodukt.

Ein <u>Skalarprodukt</u> auf einem $\mathbb{C}$-VR V ist eine positiv definite hermitesche Sesquilinearform

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \underline{v}, \underline{w} &\longmapsto \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle \end{aligned}$$

Ein <u>unitärer VR</u> $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein $\mathbb{C}$-VR zusammen mit einem solchen Skalarprodukt.

In beiden Fällen ist die assoziierte <u>Norm</u> gegeben durch

$$\|\cdot\| : \underline{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\underline{v} \longmapsto \sqrt{\underbrace{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}_{\geq 0}}$$

Satz: [6.1.2] In jedem euklidischen oder unitären VR $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ gilt:

(i) $\|\underline{v}\| \geq 0 \quad \forall \underline{v} \in V$

$\|\underline{v}\| = 0 \iff \underline{v} = \underline{0}$

(ii) $\|\lambda \cdot \underline{v}\| = |\lambda|_K \cdot \|\underline{v}\| \quad \forall \lambda \in K, \underline{v} \in V$

$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

(iii) Dreiecksungleichung:

$$\|\underline{v} + \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$$

(iv) Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$|\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle|_K \leq \|\underline{v}\| \cdot \|\underline{w}\|$$

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euklidisch oder unitär

Def [6.5.4]:

$\underline{v} \in V$ <u>normiert</u>, falls $\|\underline{v}\| = 1$

$\underline{v}, \underline{w}$ <u>orthogonal</u>, falls $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$

$\underline{v} \perp \underline{w}$

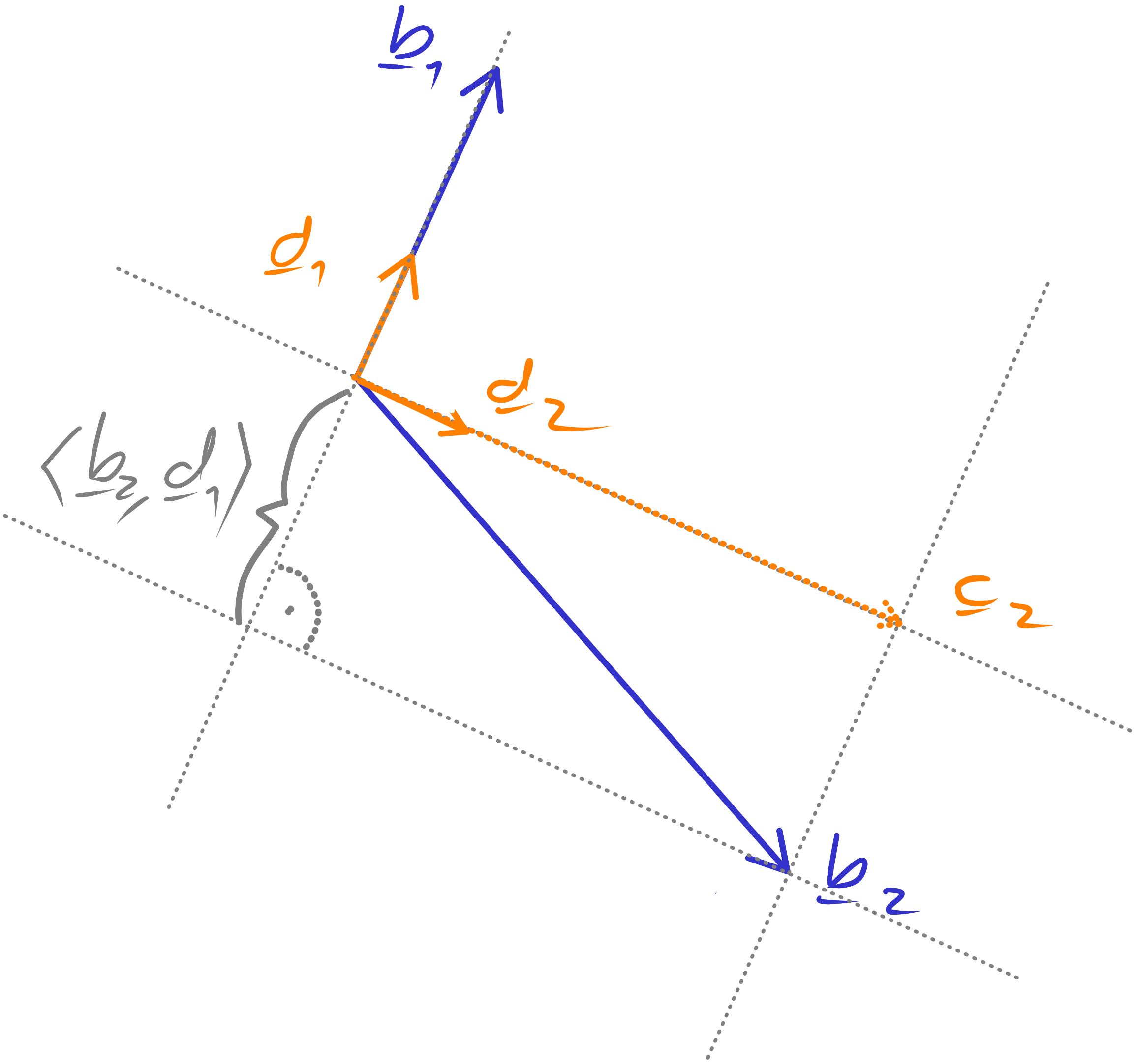
<u>Orthonormalbasis</u> (ON-Basis):

Basis $(\underline{b}_i)_i$ von V für die gilt:

jedes $\underline{b}_i$ normiert

und $\underline{b}_i \perp \underline{b}_j$ für $i \neq j$.

Satz [6.5.5]: Jeder endlich-dim. euklidische oder unitäre VR besitzt eine ON-Basis.



Korollar:

Jedes Skalarprodukt auf einem endlich-dim. $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-VR wird in einer geeigneten Basis durch die Einheitsmatrix dargestellt.